

APLICAÇÃO DOS ALGORITMOS DE MÍNIMOS QUADRADOS PARA LOCALIZAÇÃO DE VEÍCULO

Cleber Almeida de Oliveira

Fundação Ezute

Rua do Rócio, 313 - 11º Andar - Vila Olímpia – São Paulo – SP

caoliveira@ezute.org.br ou oacleber@gmail.com

RESUMO

Desde o início da navegação marítima, recorre-se à obtenção da posição no mar por meio da interseção das Linhas de Posição medidas, de modo a facilitar o processo decisório do navegante para definição do rumo e da velocidade a serem adotados pela embarcação. O objetivo e a contribuição desse trabalho consiste em apresentar a aplicação dos algoritmos Mínimos quadrados ordinários e totais (*Least Squares* e *Total Least Squares*) em uma aplicação numérica para determinar a localização de veículo autônomo a partir da composição das retas de marcação observadas. Os algoritmos apresentaram resultados próximos de modo a não afetar o comando e controle do veículo.

PALAVRAS-CHAVE. Mínimos Quadrados, Mínimos Quadrados Totais, Linha de Posição.

ABSTRACT

Since the beginning of maritime navigation, it has been resorted to obtain the position at sea through the intersection of the measured Position Lines, in order to facilitate the navigator's decision-making process to define the course and speed to be adopted by the vessel. The aim and the contribution of this work is to present an application of Least Square and Total Least Square algorithms to determine the localization of an autonomous vehicles from the composition of lines of sight observed. The algorithms presented close results so as not to affect the vehicle's command and control.

KEYWORDS. Least Squares. Total Least Squares. Line of sight.

1. Introdução

Desde o início da navegação marítima, recorre-se à obtenção da posição no mar por meio da interseção das Linhas de Posição medidas, de modo a facilitar o processo decisório do navegante para definição do rumo e da velocidade a serem adotados pela embarcação.

Conforme [Miguens 2019], uma Linha de Posição é o lugar geométrico de todas os pontos que o navio pode ocupar, tendo efetuado uma certa observação em um determinado instante e pode ser classificada de acordo com o tipo em: a) retas de marcação; b) retas de alinhamento; c) retas de altura (observação astronômica); d) circunferência de igual distância; e) circunferência do segmento capaz; f) linhas de igual profundidade (isobatimétricas); e g) hipérbolas de posição (Linha de Posição eletrônica).

Normalmente, empregam-se três (3) Linhas de Posição para a determinação da localização, visando a verificar a consistência das três observações e dirimir a ambiguidade de posição. Na ausência de erro, há a interseção das Linhas de Posição em um único ponto, enquanto a presença de erros nas medidas efetuadas e nos instrumentos acarretam a observação de um triângulo de incerteza e a solução ótima é obtida geometricamente ou algebricamente por meio do emprego de algoritmos estimadores.

Esse problema de localização, atualmente, possui uma vasta quantidade de aplicações duais (de interesse militar e civil) no posicionamento de veículos autônomos e na localização passiva de emissores, sendo as Linhas de Posição de marcação as mais comuns.

O objetivo desse trabalho consiste em apresentar a aplicação dos algoritmos *Least Squares* (LS) e *Total Least Squares* (TLS) para a localização de veículo autônomo a partir da composição das retas de marcação observadas.

2. Linha de Posição de Reta de Marcação

O navegante ao traçar uma Linha de Posição de reta de marcação, a partir de uma observação de marcação visual de um ponto notável, pode determinar a equação linear reduzida da reta considerando as coordenadas do ponto notável e o coeficiente angular (m) da reta de marcação associada.

A Figura. 1 ilustra a equação da reta, onde α é o ângulo formado entre a reta e o eixo x , m é a tangente de α (coeficiente angular da reta) e b é o coeficiente linear da reta que representa o ponto onde a reta corta o eixo y .

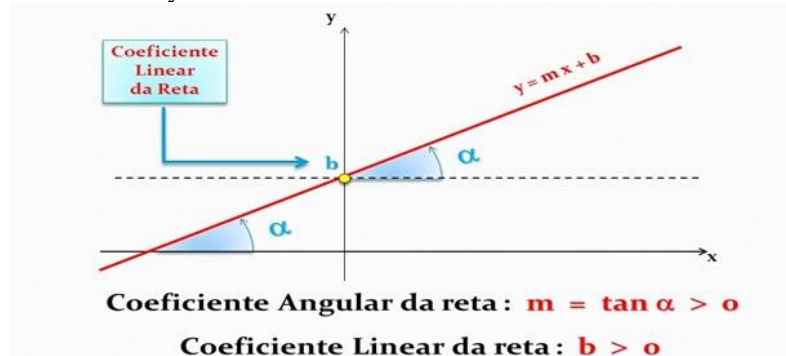


Figura 1 – Equação da reta

Uma reta pode ser determinada por meio de dois de seus pontos conhecidos ou por meio de um de seus pontos e sua inclinação. Essa reta determina uma direção no espaço, o que significa que existem infinitas retas paralelas no espaço que têm a mesma direção, inclusive um vetor unitário \vec{v} não nulo.



Assim, o ponto notável $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ define o ponto conhecido e a marcação visual M define a inclinação do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$, não nulo. Como só existe uma reta r que passa pelo ponto P_0 e tem a direção do vetor \vec{v} , descreve-se um ponto $P(x, y, z)$ qualquer pertencente à reta r (2) somente se o vetor \vec{PP}_0 for paralelo ao vetor \vec{v} , ou seja, $\vec{PP}_0 = t\vec{v}$, para qualquer parâmetro escalar t .

As coordenadas do vetor \vec{PP}_0 são: $\vec{PP}_0 = (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = (ta, tb, tc)$, ou seja:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (2)$$

Isolando-se o parâmetro t , temos:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (3)$$

A Figura 2 ilustra o problema de localização utilizando medidas de marcação.

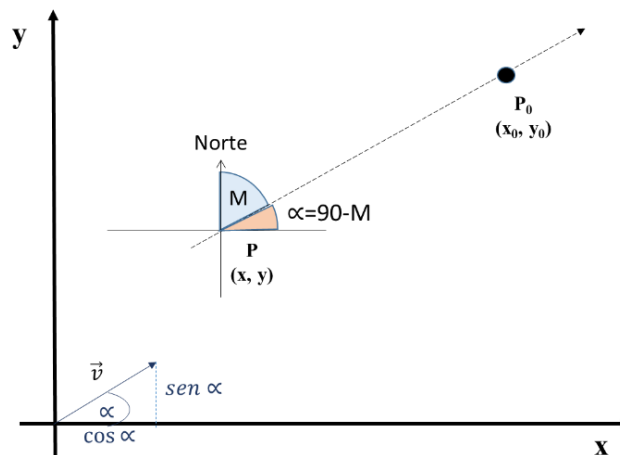


Figura 2 – Problema de localização empregando medidas de marcação

Nesse problema em 2D, o vetor $\vec{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ e a equação genérica do problema é dada por:

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha} \quad (4)$$

$$(x - x_0) * \sin \alpha = (y - y_0) * \cos \alpha \quad (5)$$

$$\sin \alpha * x - \cos \alpha * y = \sin \alpha * x_0 - \cos \alpha * y_0 \quad (6)$$

[Miguens 2019] afirma que uma única Linha de Posição de marcação contém a posição do navio, porém não a define. A estimativa da localização é obtida pelo ponto de interseção das linhas de marcação medidas pelo observador (triangulação).

Ao se obter as medidas de marcação de n pontos notáveis (P_0, P_1, \dots, P_n) em um determinado instante, monta-se um sistema de equações (eq. 7) para o cálculo do vetor $P=[x, y]^T$ que satisfaça ao conjunto de equações, definindo a posição do navio.

$$\begin{cases} \text{sen } \alpha_0 * x - \text{cos } \alpha_0 * y = \text{sen } \alpha_0 * x_0 - \text{cos } \alpha_0 * y_0 \\ \text{sen } \alpha_1 * x - \text{cos } \alpha_1 * y = \text{sen } \alpha_1 * x_1 - \text{cos } \alpha_1 * y_1 \\ \vdots \\ \text{sen } \alpha_n * x - \text{cos } \alpha_n * y = \text{sen } \alpha_n * x_n - \text{cos } \alpha_n * y_n \end{cases} \quad (7)$$

Na ausência de erros nas medidas de marcação, a interseção das linhas ocorre em um único ponto. Contudo na presença de erros em tais medidas, um triângulo de incerteza é observado e a solução ótima é obtida geometricamente ou algebricamente por meio do emprego de algoritmos estimadores.

Os seguintes casos devem ser considerados na obtenção do ângulo α para construção das equações:

Caso 1: $000^\circ < \text{Marcação (M)} < 360^\circ$ e $M \neq 180^\circ$.

Equivale a observar um ponto notável (x_a ; y_a) nos quadrantes trigonométricos, onde $\alpha = 90^\circ - M$.

Caso 2: $\text{Marcação (M)} = 180^\circ$ ou $M = 000^\circ$.

$\alpha = 90,001^\circ - M$.

O problema de localização apresentado pela eq. (7) pode ser representado matricialmente por $A * x \approx b$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \text{sen } \alpha_0 & -\text{cos } \alpha_0 \\ \text{sen } \alpha_1 & -\text{cos } \alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ \text{sen } \alpha_n & -\text{cos } \alpha_n \end{bmatrix}}_A * \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_x \approx \underbrace{\begin{bmatrix} \text{sen } \alpha_0 * x_0 - \text{cos } \alpha_0 * y_0 \\ \text{sen } \alpha_1 * x_1 - \text{cos } \alpha_1 * y_1 \\ \vdots \\ \text{sen } \alpha_n * x_n - \text{cos } \alpha_n * y_n \end{bmatrix}}_b \quad (8)$$

Onde, $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathfrak{R}^{m \times d}$ são os dados do problema e $x \in \mathfrak{R}^{n \times d}$ é a posição a ser definida, tal que Ax é a melhor aproximação para b . Ou seja, obter um x que minimize $\|Ax - b\|_2$, onde $\|\cdot\|_2$, é norma vetorial euclidiana. Se o número de equações de Linhas de Posição (m) for igual ao número de dimensões (n) a serem determinadas ($m = n$) e A é uma matriz não singular, a resposta é simples: $x = A^{-1}b$. Mas, se $m > n$ então há mais equações do que variáveis, o problema é conhecido como sobredeterminado e geralmente nenhum x satisfaz $Ax = b$ exatamente. Ocasionalmente, encontram-se problemas indeterminados, onde $m < n$. Neste trabalho serão estudados apenas os problemas mais comuns: os casos sobredeterminados.

3. Algoritmos de Localização

Os principais trabalhos realizados para a obtenção da localização ótima a partir da composição das Linhas de Posição de marcação são: a) estimador *Weighted Least Squares* (WLS) – [Stansfield 1947]; b) o algoritmo *Total Least Squares* (TLS) – [Rao & Reddy 1994]; c) os estimadores *maximum likelihood* (ML), *Least squares* (LS) e *Weighted Least Squares* foram comparados por [Gavish & Weiss 1992]; e d) os algoritmos LS, TLS, *Generalized Hough Transform* (GHT) e do Minimax foram analisados por [Santos et al. 2016].

Os algoritmos estimadores algébricos LS e TLS são os mais aplicados para a obtenção de solução otimizada para o problema de localização apresentado no sistema linear $Ax = b$ (eq. 8), considerando as Linhas de Posição de marcação.

O algoritmo LS foi proposto para minimizar uma função objetivo que é a soma dos quadrados das distâncias verticais entre o ponto e as retas representativas das marcações medidas pelo observador. A solução otimizada \hat{x}_{LS} é obtida por meio da eq. 9.

$$\hat{x}_{LS} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (9)$$

Algoritmo LS:

1. Entrada: A e b;
2. Se houver inversa de $(A^T A)^{-1}$ então
3. Calcule $\hat{x}_{LS} = (A^T A)^{-1} A^T b$
4. senão
5. MSG que o problema não possui solução.
6. fim
7. Saída: \hat{x}_{LS}

O algoritmo TLS foi proposto para também minimizar uma função objetivo que é a soma dos quadrados das distâncias ortogonais entre o ponto e as retas representativas das marcações medidas pelo observador. A fatoração matricial de decomposição de valores singulares (SVD) possui grande importância teórica e prática para tratar o problema de mínimos quadrados. Essa decomposição, atualmente, também é a principal ferramenta em inúmeras áreas de aplicação, tais como processamento de sinal e processamento de imagem, teoria de controle, reconhecimento de padrões, análise de séries temporais, entre outras.

Algoritmo TLS:

1. Entrada: A e b;
2. Computar a decomposição de valores singulares: $[U \ S \ V] = \text{svd}[A \ b]$;
Onde: $V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ d \end{matrix}$ e $S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ d \end{matrix}$
3. Se V_{22} for não singular então
4. Calcular $\hat{x}_{TLS} = -V_{12}V_{22}^{-1}$
5. senão
6. MSG que o problema não possui solução.
7. Fim
8. Saída: \hat{x}_{TLS}

No caso especial em que $b \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$, a solução otimizada \hat{x}_{TLS} é obtida pela expressão analítica descrita na eq. 10.

$$\hat{x}_{TLS} = (A^T A - \sigma_S^2 I)^{-1} A^T b \quad (10)$$

onde σ_S^2 é o menor valor singular da matriz $[A \ b]$.

4. Aplicação Numérica

O veículo remotamente pilotado possui uma câmera orientada por um giroscópio e obtém as seguintes marcações verdadeiras dos pontos notáveis nas suas respectivas posições (Tabela 1):

Tabela 1 – Pontos Notáveis

Ponto Notável	Marcações	Posição em X	Posição em Y
A	045°	5	5
B	315°	-1	3
C	270	-1	1,5

A Figura 3 ilustra a formação de um triângulo de incerteza formado geometricamente pela interseção das três retas de marcação.

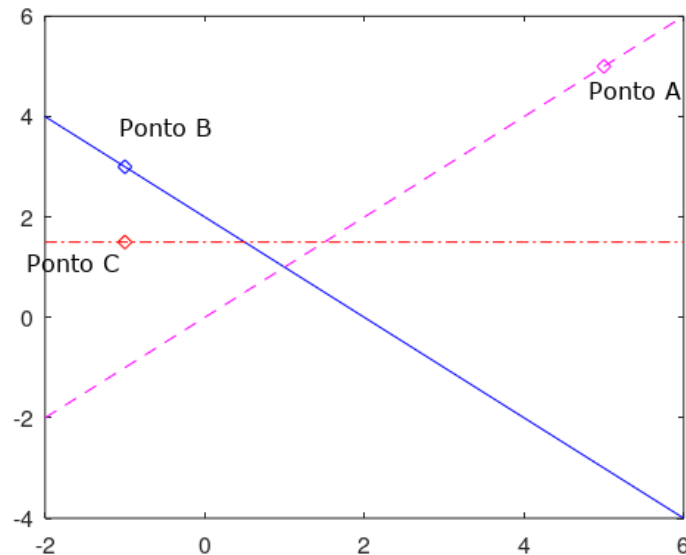


Figura 3 – Triângulo de Incerteza

As retas derivadas das marcações dos pontos notáveis configuram o sistema de equações apresentado na eq. 11.

$$\begin{cases} \text{Reta A} & \begin{cases} x - y = 0 \\ \text{Reta B} & \begin{cases} x + y = 2 \\ \text{Reta C} & \begin{cases} y = 1,5 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

A partir do sistema de equações, obtém-se a matriz A e o vetor b.

No Octave, a matriz A e o vetor b são declarados:

```
A=[1 -1; 1 1; 0 1]; % Matriz A
b=[0 2 1.5]'; % Vetor b
```

Cálculo do \hat{x}_{LS} :

```
X_LS=inv(A'*A)*A'*b %Least Square
```

$X_{LS} = [1.0000 \ 1.1667]'$

Decomposição de valores Singulares:

```
[U S V]=svd([A b]); % SVD
```

$$U = \begin{bmatrix} 0.084790 & 0.916293 & 0.391431 \\ -0.806296 & 0.293901 & -0.513332 \\ -0.585404 & -0.272084 & 0.763723 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2.9840 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5156 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2211 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.2418 & 0.7985 & -0.5513 \\ -0.4948 & -0.5902 & -0.6378 \\ -0.8347 & 0.1186 & 0.5378 \end{bmatrix}$$

```
Cálculo do  $\hat{x}_{TLS}$   
[m n]=size(V);  
for i=1:m-1  
    X_tls(i,i)=-V(i,n)/V(m,n); % Total Least Square  
End
```

$$X_{TLS} = [1.0251 \quad 1.1860]$$

A Figura 4 ilustra a posição do veículo autônomo pela resolução do problema de localização considerando a aplicação dos algoritmos de LS e TLS.

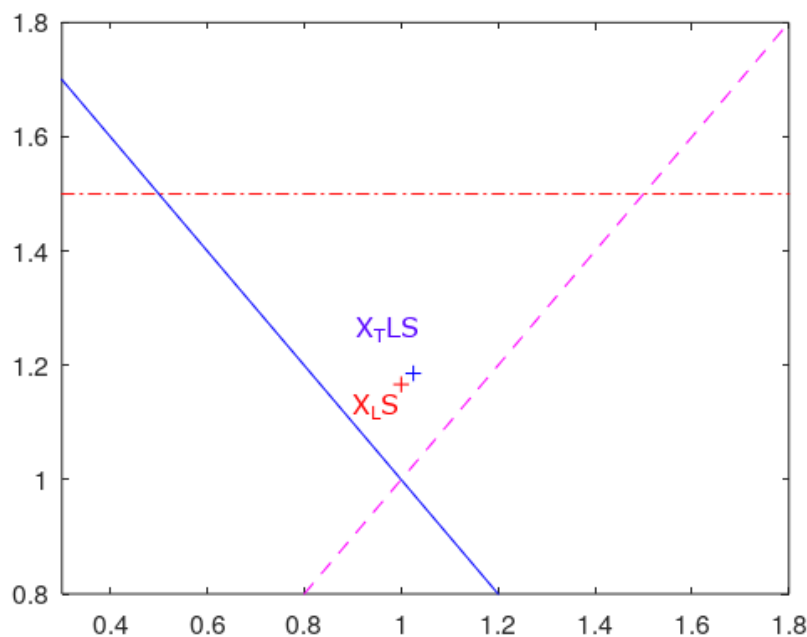


Figura 4 – Solução pelos algoritmos de LS e TLS.

A solução do algoritmo LS [1.0000 1.1667]' minimiza uma função objetivo que é a soma dos quadrados das distâncias verticais entre o ponto e as retas representativas das marcações medidas pelo observador. A solução do algoritmo TLS [1.0251 1.1860]' minimiza uma função objetivo que é a soma dos quadrados das distâncias ortogonais entre o ponto e as retas representativas das marcações medidas pelo observador.

4. Conclusões

Os dois principais algoritmos de localização *Least Squares* e *Total Least Squares* foram aplicados para o posicionamento de um veículo autônomo. Os algoritmos apresentaram resultados próximos de modo a não afetar o comando e controle do veículo.

Sugere-se como trabalhos futuros o registro de maior número de pontos de controle do veículo de modo a possibilitar a mensuração da média dos erros dos algoritmos aplicados.

Referências

MIGUENS, A. P. (2019). Livro Navegação: A Ciência e a Arte. Web page. <https://www.marinha.mil.br/dhn/?q=pt-br/npublicacoes>. Acessado: 2021-06-04.

Stansfield, R. G. (1947) “. Statistical theory of DF fixing,” J. IEE 94 (15), pp. 762-777.

Rao, K. D. e Reddy, D. C. (1994) “A new method for finding electromagnetic emitter location”, IEE Transactions on aerospace and electronic systems, vol. 30, pp. 1081-1085.

Gavish, M. e Weiss, A. J. (1992). Performance analysis of bearing-only target location algorithms.” IEEE Transactions on aerospace and electronic systems, vol. 28, pp. 817-828.

Santos, E. C., Apolinario, J. A., Santos, J. C. A (2016) “Avaliação de algoritmos de localização de alvos baseados apenas em medidas de marcação” XXXIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBrT2016 – Santarém, PA.